18 [2000 法政大]

外接円の半径を R とすると，正弦定理から　$2R=\dfrac{1}{\sin 30^\circ}=2$

よって，求める直径は　2

19 [1999 東北学院大]

(1)　最大辺の対角の大きさを θ とすると　$\cos\theta=\dfrac{6^2+10^2-14^2}{2\cdot 6\cdot 10}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ から　$\theta=120^\circ$

(2)　$\triangle$ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(6+10+14)=15r$$

一方　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\sin 120^\circ=15\sqrt{3}$

よって　$15r=15\sqrt{3}$　　ゆえに　$r=\sqrt{3}$

20 [2003 鳥取大]

(1)　$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とおくと　$0^\circ<\theta<180^\circ$

余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{9^2+6^2-12^2}{2\cdot 9\cdot 6}=-\frac{27}{108}=-\frac{1}{4}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから　$\sin\theta>0$

よって　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\div\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\sqrt{15}$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 6\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{27\sqrt{15}}{4}$ (m^2)

(3)　円形プールの半径を R とすると，正弦定理により　$2R=\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin\theta}$

よって　$R=\dfrac{\mathrm{CA}}{2\sin\theta}=\dfrac{12}{2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{24}{\sqrt{15}}$

したがって，プールの面積 S は　$S=\pi R^2=\pi\cdot\dfrac{24^2}{15}=\dfrac{192}{5}\pi$ (m^2)

21 [2015 神戸薬科大]

正弦定理から　　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

よって　　$a:b:c=3:5:7$

ゆえに，$a=3k$，$b=5k$，$c=7k$ $(k>0)$ とおくと

$$\cos A=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(3k)^2}{2\cdot 5k\cdot 7k}=\frac{65k^2}{70k^2}=\frac{13}{14}$$

$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

したがって　　$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}={}^{\text{ア}}\,\dfrac{3\sqrt{3}}{13}$

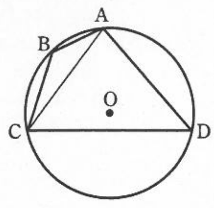
また　　$\cos C=\dfrac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}=\dfrac{-15k^2}{30k^2}=-\dfrac{1}{2}$

$0<C<\pi$ であるから　　$C={}^{\text{イ}}\,\dfrac{2}{3}\pi$

22 [2015 東京理科大]

(1)　$\triangle$ABC に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cos\angle\mathrm{B}\\&=13-12\cos\angle\mathrm{B}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$



$\angle\mathrm{D}=180^\circ-\angle\mathrm{B}$ であるから，$\triangle$ACD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=6^2+5^2-2\cdot 6\cdot 5\cos(180^\circ-\angle\mathrm{B})\\&=61+60\cos\angle\mathrm{B}\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

①，②から　$13-12\cos\angle\mathrm{B}=61+60\cos\angle\mathrm{B}$

ゆえに　　$72\cos\angle\mathrm{B}=-48$　　　したがって　$\cos\angle\mathrm{B}={}^{\text{ア}}-\dfrac{2}{3}$

これを①に代入すると　　$\mathrm{AC}^2=13-12\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=13+8=21$

AC>0 であるから　　$\mathrm{AC}={}^{\text{イ}}\sqrt{21}$

(2)　円 O の半径を R とする。

$\triangle$ABC において，正弦定理により　$2R=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{B}}$

ここで，$\sin\angle\mathrm{B}>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{B}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{B}}=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

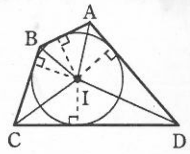
よって　　$R=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{21}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{5}}={}^{\text{ウ}}\,\dfrac{3\sqrt{105}}{10}$

(3)　$\sin(180^\circ-\angle\mathrm{B})=\sin\angle\mathrm{B}$ であるから，四角形 ABCD の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\sin\angle\mathrm{B}+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\sin\angle\mathrm{B}$$

$$=18\sin\angle\mathrm{B}=18\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}={}^{\text{エ}}6\sqrt{5}$$

(4)　四角形 ABCD が外接している円の中心を I，半径を r とする。



右の図より，

四角形 ABCD $=\triangle\mathrm{IAB}+\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICD}+\triangle\mathrm{IDA}$

であるから

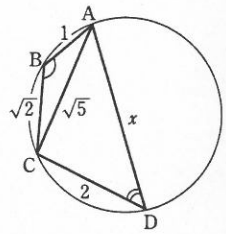
$$6\sqrt{5}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot r$$

ゆえに　　$6\sqrt{5}=8r$　　　したがって　　$r={}^{\text{オ}}\,\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$

23 [2009 首都大学東京]

(1)　$\triangle$ABC において，余弦定理により

$$\cos B=\frac{1^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$



(2)　(1) から　　$B=135^\circ$

よって，$\triangle$ABC において，正弦定理により

$$\frac{\sqrt{5}}{\sin 135^\circ}=2R$$

ゆえに　　$R=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

(3)　四角形 ABCD は円に内接するから

$$D=180^\circ-B=180^\circ-135^\circ=45^\circ$$

よって　　$\cos D=\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(4)　$\mathrm{AD}=x$ とする。$\triangle$ACD において，余弦定理により

$$(\sqrt{5})^2=x^2+2^2-2\cdot x\cdot 2\cos 45^\circ$$

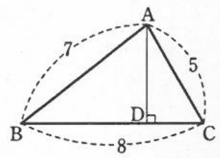
よって　　$x^2-2\sqrt{2}x-1=0$

ゆえに　　$x=\sqrt{2}\pm\sqrt{2+1}=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$

$x>0$ であるから　　$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$　　　すなわち　$\mathrm{AD}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

24 [2007 名城大]

$\cos\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5}=\dfrac{40}{80}={}^{\text{ア}}\,\dfrac{1}{2}$



よって　　$\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$

したがって　　$\mathrm{AD}=5\sin 60^\circ={}^{\text{イ}}\,\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

25 [2013 芝浦工業大]

三平方の定理により

$$\mathrm{AC}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4,$$

$$\mathrm{CF}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3,$$

$$\mathrm{FA}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{17}$$

$\triangle$ACF において，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{4^2+3^2-(\sqrt{17})^2}{2\cdot 4\cdot 3}$$

$$=\frac{8}{24}={}^{\text{ア}}\,\frac{1}{3}$$

よって　　$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CF}\sin\theta$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$={}^{\text{イ}}4\sqrt{2}$$

次に，三角錐 ACFB の体積を 2 通りに表すと

$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{AFC}\cdot\mathrm{BP}$,

$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCF}\cdot\mathrm{AB}$

よって $\dfrac{1}{3}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\mathrm{BP}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{5}\right)\cdot 2\sqrt{3}$ から

$$\mathrm{BP}={}^{\text{ウ}}\,\frac{\sqrt{30}}{4}$$